有限差分方法

郭庆超

中国水科院泥沙所

2007年10月

内　容

1. 简介
2. 微分离散
3. 有限差分通用表达式
4. 时间差分近似

有限差分方法

1. 简介

- 微分方程 → 代数方程

微分方程 ← 大多数控制方程都是微分方程，且没有解析解

↓

离散 ← 确定计算区域方程离散的节点（网格）数

↓

差分近似 ← 将控制方程中的微分项用差分近似表示

↓

代数方程求解

- 数值解收敛与否?

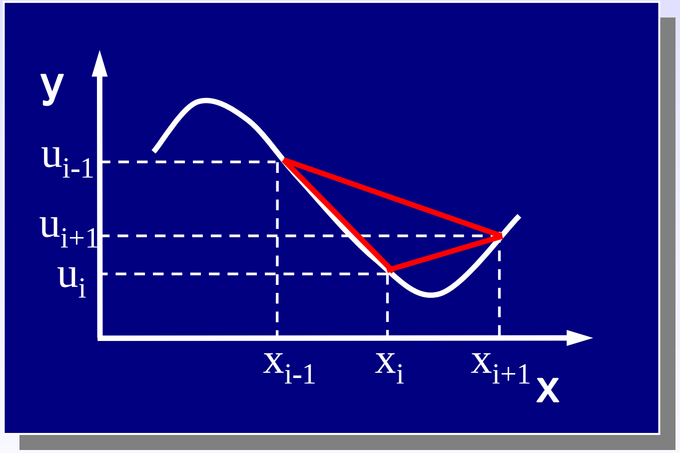
$$\left| u - U \right| < \varepsilon$$

有限差分方法

2. 微分离散

- 连续函数 **u(x)**微分的定义：

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$



略去极限运算，得到差分近似：

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

确定与节点对应的自变量位置

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{(x_i+h) - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}$$

- 微分的差分近似并不是唯一的，**du/dx**可表示为以下：

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{or} \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad \text{or} \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

有限差分方法

2. 微分离散

泰勒级数展开

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta x\frac{d}{dx}u(x)+\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3}{dx^3}u(x)+\ldots\ldots\frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u(x)+R_n$$

余项**Rn**定义为：

$$R_n=\frac{\Delta x^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}u(x)$$

节点**i+1**的有限差分近似表达式可写为：

$$u_{i+1}=u_i+\Delta x\frac{d}{dx}u_i+\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2}{dx^2}u_i+\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3}{dx^3}u_i+R_4$$

重新安排方程：

$$u_{i+1}=u_i+\Delta x\frac{du_i}{dx}+R_2 \rightarrow \frac{du_i}{dx}=\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}+R_2$$

节点**i-1**的有限差分近似表达式可写为：

$$u_{i-1}=u_i-\Delta x\frac{du_i}{dx}+\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2u_i}{dx^2}-\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3u_i}{dx^3}+R_4 \rightarrow \frac{du_i}{dx}=\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}+R_2$$

有限差分方法

2. 微分离散

泰勒级数展开

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \frac{du_i}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2u_i}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3u_i}{dx^3} + R_4$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \frac{du_i}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2u_i}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3u_i}{dx^3} + R_4$$

将上述两个方程中的**du/dx**消去，得到二次微分**d^2u/dx^2**的近似表达式

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + R_4$$

- 差分近似阶段了级数展开的高次项，产生截断误差。截断误差定义为：微分真值与差分近似值之间的差值。
- 由于截断误差是泰勒展开中的高次项，所以在差分近似表达式中可以忽略

有限差分方法

2. 微分离散

- 微分**du/dx**的差分近似表达式的截断误差：

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}-\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{2!}\frac{d^2u_i}{dx^2}-\frac{\Delta x^2}{3!}\frac{d^3u_i}{dx^3}-R_3=O(\Delta x)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}-\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{2!}\frac{d^2u_i}{dx^2}+\frac{\Delta x^2}{3!}\frac{d^3u_i}{dx^3}-R_3=O(\Delta x)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}-\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}=-\frac{\Delta x^2}{2\bullet 3!}\frac{d^3u_i}{dx^3}-\frac{\Delta x^4}{2\bullet 5!}\frac{d^5u_i}{dx^5}-R_7=O(\Delta x^2)$$

- 上述差分近似的截断误差最高可达到**2**次。
- **d^2u/dx^2**截断误差：

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i}-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}=-\frac{\Delta x^2}{4!}\frac{d^4u_i}{dx^4}-\frac{\Delta x^4}{6!}\frac{d^6u_i}{dx^6}-R_8=O(\Delta x^2)$$

- 当 **$\Delta x\to 0$**，截断误差必须消失，这样差分近似才可以说在数值上是相容的。

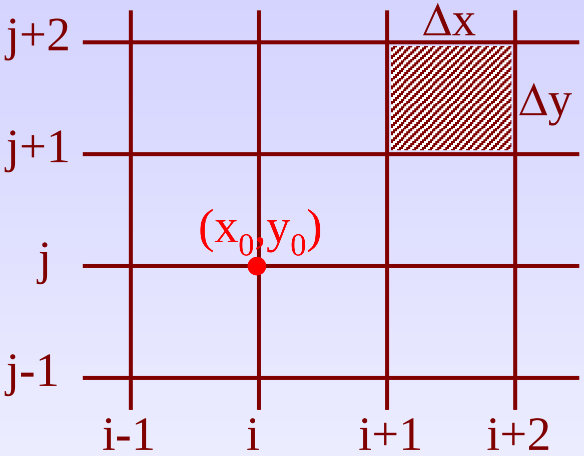
数值相容性条件：

$$\lim_{\Delta x\to 0} TE = 0$$

有限差分方法

3. 通用表达式(i)

- 用差分网格取代连续域



$u(x,y) \rightarrow u(i\Delta x, j\Delta y)$; $0 \le x \le n\Delta x$, $0 \le y \le n\Delta y$

用 $u_{i,j}$ 表示 $u(i\Delta x, j\Delta y)$ or $u(x_0, y_0)$

则

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$$u_{i+1,j+1} = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

对于随时间变化问题

$$u_{i+1,j+1}^{k+1} = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, t_0 + \Delta t)$$

- 差分格式不是唯一的，最好的差分格式应该是精度、经济与简单的优化组合。有泰勒展开得到的差分格式如下：

向前差分格式：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_i, y_j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_i, y_j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

向后差分格式：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_i, y_j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_{i+1}, y_j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

中心差分格式：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_i, y_j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

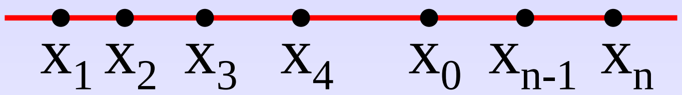
有限差分方法

3. 通用表达式(i)

- **d^2u/dx^2** 的差分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

- 对于一般性一维节点，微分**d^pu/dx^p** 可有下试获得：



$$\left.\frac{d^p u}{dx^p}\right|_{x_i}=\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2+\gamma_3 u_3+\ldots\ldots=\sum_{m=1}^{n}\gamma_m u_m$$

- 对于任意阶**p**的微分在**n**个节点上的差分近似方程都可以由该式表达，只要满足：**$n \geq p+1$**即可。

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1-x_0 & x_2-x_0 & \ldots & x_n-x_0 \\ (x_1-x_0)^2 & (x_2-x_0)^2 & \ldots & (x_n-x_0)^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & . \\ \vdots & \vdots & \ldots & . \\ (x_1-x_0)^p & (x_2-x_0)^p & \ldots & (x_n-x_0)^p \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ .\\ .\\ .\\ \gamma_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ .\\ .\\ .\\ p!\end{Bmatrix}$$

- 一般来讲，差分近似精度可达 **$O(\Delta x_{max})^{n-p}$**
- 当**$n=p+1$**，用的节点数最少，差分近似的精度是一阶的。但当**p**是偶数，且 **Δx_1**是常数，差分近似精度可达二阶。

有限差分方法

例 1: (i)

- 用有限差分求解下列微分方程，该控制方程是描述一种溶解物质在静水中扩散与反应情况。

$$D\frac{d^2C}{dx^2}-KC=0,\quad 0<x<1cm$$
$$C(0)=0,\quad C(1)=C_1$$

C: 浓度, (C_1=1 g/cm^3)
D: 扩散系数 (=0.01 cm^2/s)
K: 反应速率 (=0.1 l/s)

1. 用 x_{i-1}, x_i 和 x_{i+1}推导 d^2C/dx^2的差分表达式

P=2, n=3 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2\Delta x & -\Delta x & 0\\ 4\Delta x^2 & \Delta x^2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{i-1}\\ \gamma_i\\ \gamma_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\2\end{Bmatrix}$ → $\gamma_{i-1}=\frac{1}{\Delta x^2},\quad \gamma_i=\frac{-2}{\Delta x^2},\quad \gamma_{i+1}=\frac{1}{\Delta x^2}$

有限差分表达式: $$D\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2}-KC_i=0$$

$$C_{i+1}+\left(-\frac{K\Delta x^2}{D}-2\right)C_i+C_{i-1}=0$$

有限差分方法

例 1: (ii)

$$C_{i+1}+\left(-\frac{K\Delta x^2}{D}-2\right)C_i+C_{i-1}=0$$

- 该方程是代数方程，可以求解节点的浓度近似值。

边界条件： $C_{x=0}=0 \quad and \quad C_{x=1cm}=1$

有限差分方程组的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 1 & -\frac{K\Delta x^2}{D}-2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & -\frac{K\Delta x^2}{D}-2 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ . \\ C_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{Bmatrix}$$

有限差分方法

例 1: (iii)

- 分别考虑采用3、5、10和20节点的离散：

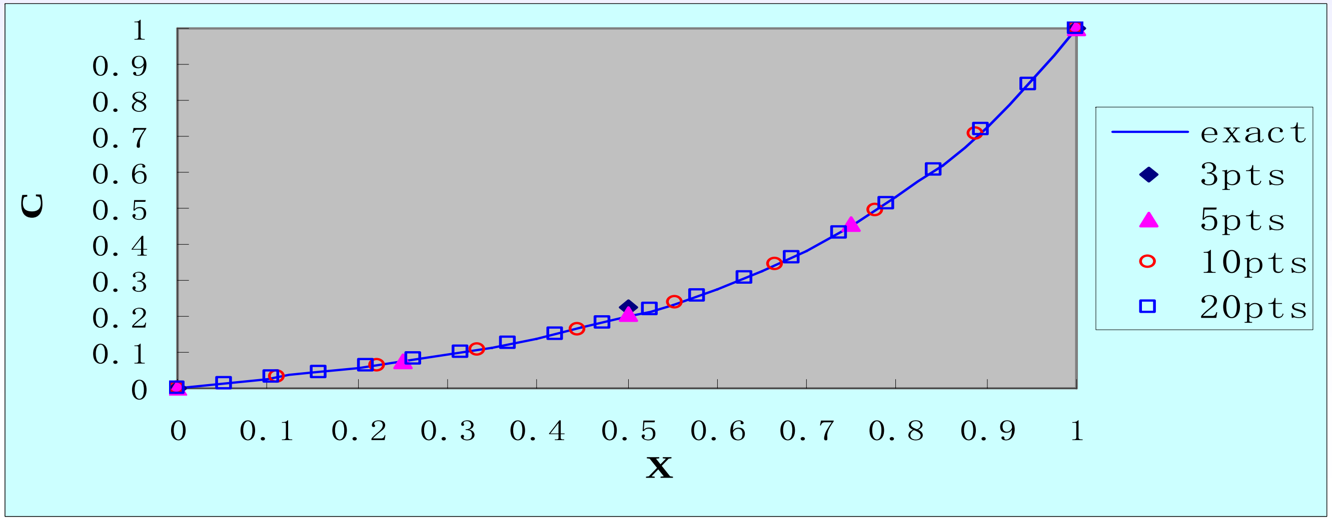
采用3个节点： $X_1=0$　　$X_2=0.5$　　$X_3=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{K\Delta x^2}{D}-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow C_1+\left(-\frac{K\Delta x^2}{D}-2\right)C_2+C_3=0$$

$$C_2=\frac{D}{K\Delta x^2+2D}=\frac{0.01}{0.1*(0.5)^2+2*0.01}=0.222$$

微分方程的分析解：

$$C=\frac{1}{e^{\sqrt{K/D}}-e^{-\sqrt{K/D}}}\left(e^{\sqrt{K/D}x}-e^{-\sqrt{K/D}x}\right)$$



有限差分方法

例 2: (i)

- 推导具有边界通量型的恒定反应扩散控制微分方程的有限差分方程：

$$D\frac{d^2C}{dx^2} - KC = 0, \quad 0 < x < 1cm$$

$$C(0) = 0, \quad D\frac{dC}{dx}\bigg|_{x=1} = C_*$$

C: 浓度 (C_*=0.01 g/cm^3)

D: 扩散系数 (=0.01 cm^2/s)

K: 反应率 (=0.1 l/s)

在节点$\mathbf{x_{i-1}}$, $\mathbf{x_i}$ 和 $\mathbf{x_{i+1}}$ 的有限差分近似： →

$$C_{i+1} + \left(-\frac{K\Delta x^2}{D} - 2\right)C_i + C_{i-1} = 0$$

$$C_{x=0} = 0$$

$$\begin{cases} D\dfrac{C_{n+1} - C_{n-1}}{2\Delta x} = C_* & \text{central difference; or} \\ D\dfrac{C_{n+1} - C_n}{\Delta x} = C_* & \text{backward difference} \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} -C_{n-1} + C_{n+1} = \dfrac{2\Delta x C_*}{D}; \text{ or} \\ -C_n + C_{n+1} = \dfrac{\Delta x C_*}{D} \end{cases}$$

结合边界条件得到差分方程通用式

$$C_{n-1} + \left(-\frac{K\Delta x^2}{D} - 2\right)C_n + C_{n+1} = 0$$

$$C_{n+1} = \frac{2\Delta x C_*}{D} + C_{n-1}$$

→

$$2C_{n-1} + \left(-\frac{K\Delta x^2}{D} - 2\right)C_n = -\frac{2\Delta x C_*}{D}$$

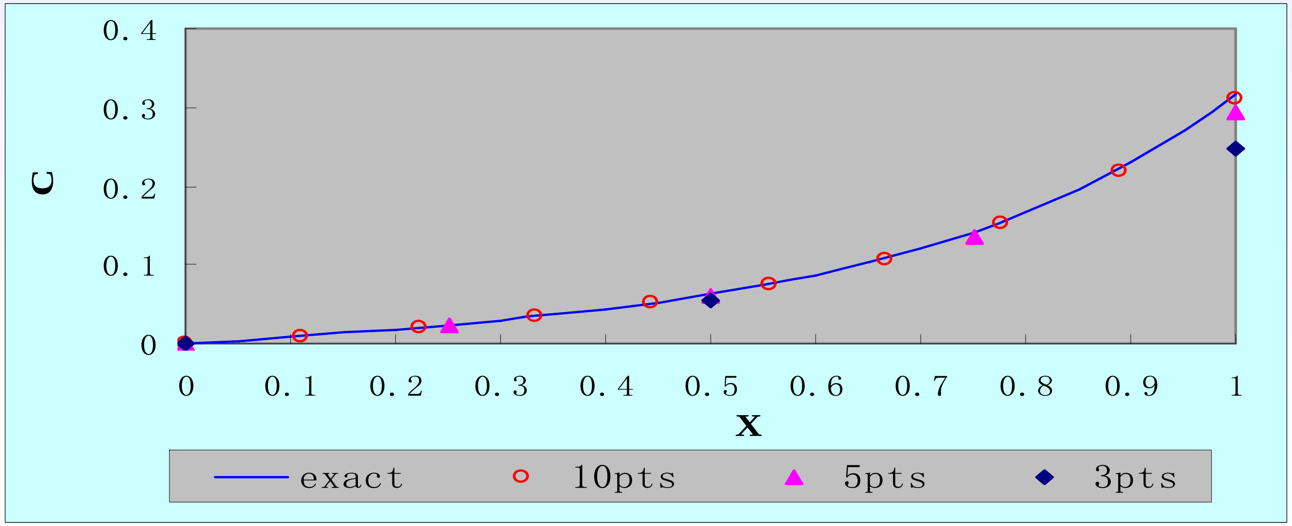
有限差分方法

例2: (ii)

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & -\frac{K\Delta x^2}{D}-2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 1 & -\frac{K\Delta x^2}{D}-2 & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -\frac{K\Delta x^2}{D}-2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ . \\ C_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ -\frac{2\Delta x C_*}{D} \end{Bmatrix}
$$

微分方程分析解:

$$
C = \frac{C_*}{D\sqrt{K/D}\left(e^{\sqrt{K/D}} - e^{-\sqrt{K/D}}\right)}\left(e^{\sqrt{K/D}\,x} - e^{-\sqrt{K/D}\,x}\right)
$$



有限差分方法

例 3:

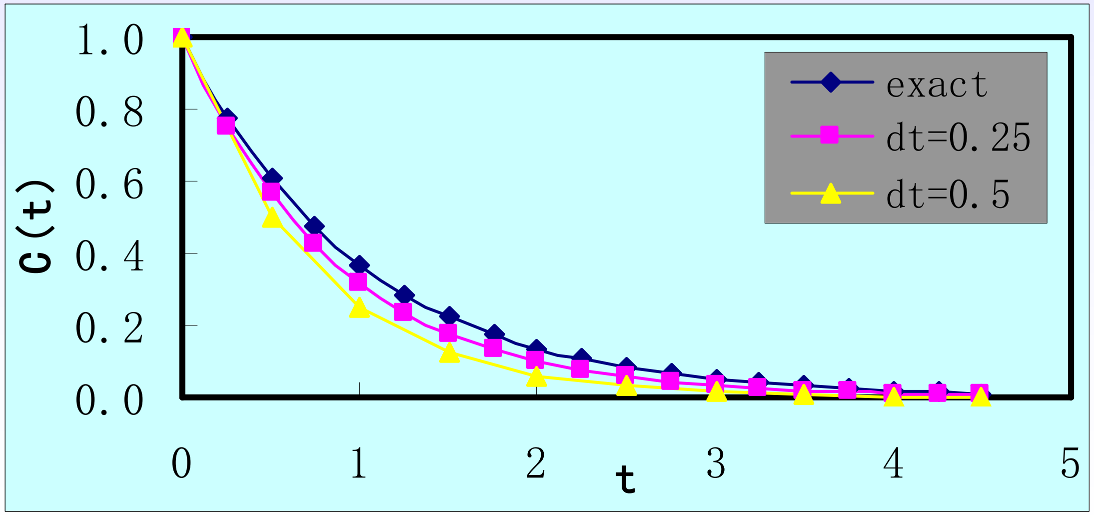
- 用向前差分方法求解下列微分方程:

$$\frac{dC}{dt}+C=0, \quad t>0 \;\; and \;\; C(0)=1$$

对时刻 t^k采用向前差分

$$\frac{C^{k+1}-C^k}{\Delta t}+C^k=0 \rightarrow C^{k+1}=(1-\Delta t)C^k$$

已知初始条件: **C(0)=1,**



t	exact	dt=0.25	dt=0.5
0	1.000	1	1
0.25	0.779	0.75	
0.5	0.607	0.563	0.5
0.75	0.472	0.422	
1	0.368	0.316	0.25
1.25	0.287	0.237	
1.5	0.223	0.178	0.125
1.75	0.174	0.133	
2	0.135	0.1	0.0625
2.25	0.105	0.075	
2.5	0.082	0.056	0.0313
2.75	0.064	0.042	
3	0.050	0.032	0.0156
3.25	0.039	0.024	
3.5	0.030	0.018	0.0078
3.75	0.024	0.013	
4	0.018	0.01	0.0039
4.25	0.014	0.008	
4.5	0.011	0.006	0.002

微分方程精确解: $C=e^{-t}$

有限差分方法

4. 时间差分近似(i)

- 求解初值问题

对于初值问题： $\frac{du}{dt} = f(u,t)$ 　初始条件： $u(t_0)=u_0$

方程组： $\left\{\frac{du}{dt}\right\} + [M]\{u\} = \{F\}$

用有限差分近似取代时间微分项得到：

$$\frac{u^{k+1} - u^{k}}{\Delta t} + [M]\{u\} = \{F\}$$

给定时间步长：

一阶一步方法：

显式差分： $\frac{(u^{k+1}) - (u^{k})}{\Delta t} + [M]\{u^{k}\} = \{F\}$

隐式差分： $\frac{(u^{k+1}) - (u^{k})}{\Delta t} + [M]\{u^{k+1}\} = \{F\}$

权重差分： $\frac{(u^{k+1}) - (u^{k})}{\Delta t} + \theta[M]\{u^{k+1}\} + (1-\theta)[M]\{u^{k}\} = \{F\}$

有限差分方法

4. 时间差分近似(ii)

- 当权重系数 θ =1时，叫向前差分（隐式差分），当θ =0时叫向后差分（显式差分）。

$$\frac{(u^{k+1})-(u^{k})}{\Delta t}+\theta[M]\{u^{k+1}\}+(1-\theta)[M]\{u^{k}\}=\{F\}$$

- 当θ =0.5，**Crank-Nicolson**差分
- 一阶近似可能有稳定性问题。

predictor-corrector method（预测-修正方法）：

两阶一步方法：

$$u^{*}=u^{k}+\Delta t(\{F\}-[M]\{u\})^{k}$$

$$u^{k+1}=u^{k}+\frac{\Delta t}{2}\left((\{F\}-[M]\{u\})^{k}+(\{F\}-[M]\{u^{*}\})^{k+1}\right)$$

有限差分方法

例 4: (i)

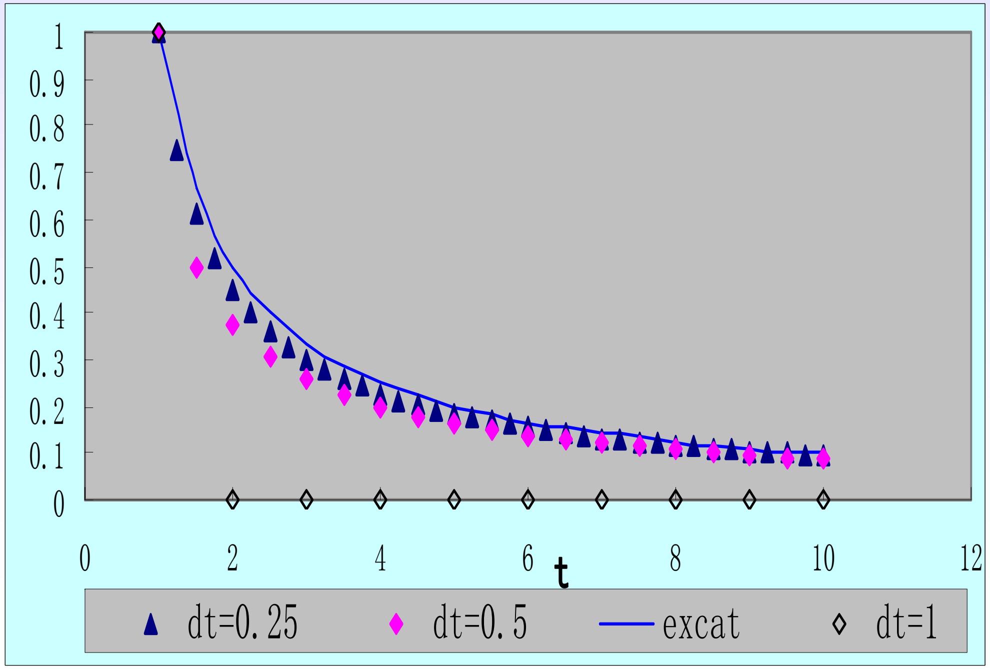
- 求解非线性初值问题

$$\frac{du}{dt}+u^2=0,\quad t>0\ \ and\ \ u(1)=1$$

精确解：$u=\dfrac{1}{t}$

有限差分近似：

显式差分：$\dfrac{(u^{k+1})-(u^{k})}{\Delta t}=-(u^{k})^2 \rightarrow u^{k+1}=u^{k}-\Delta t(u^{k})^2$



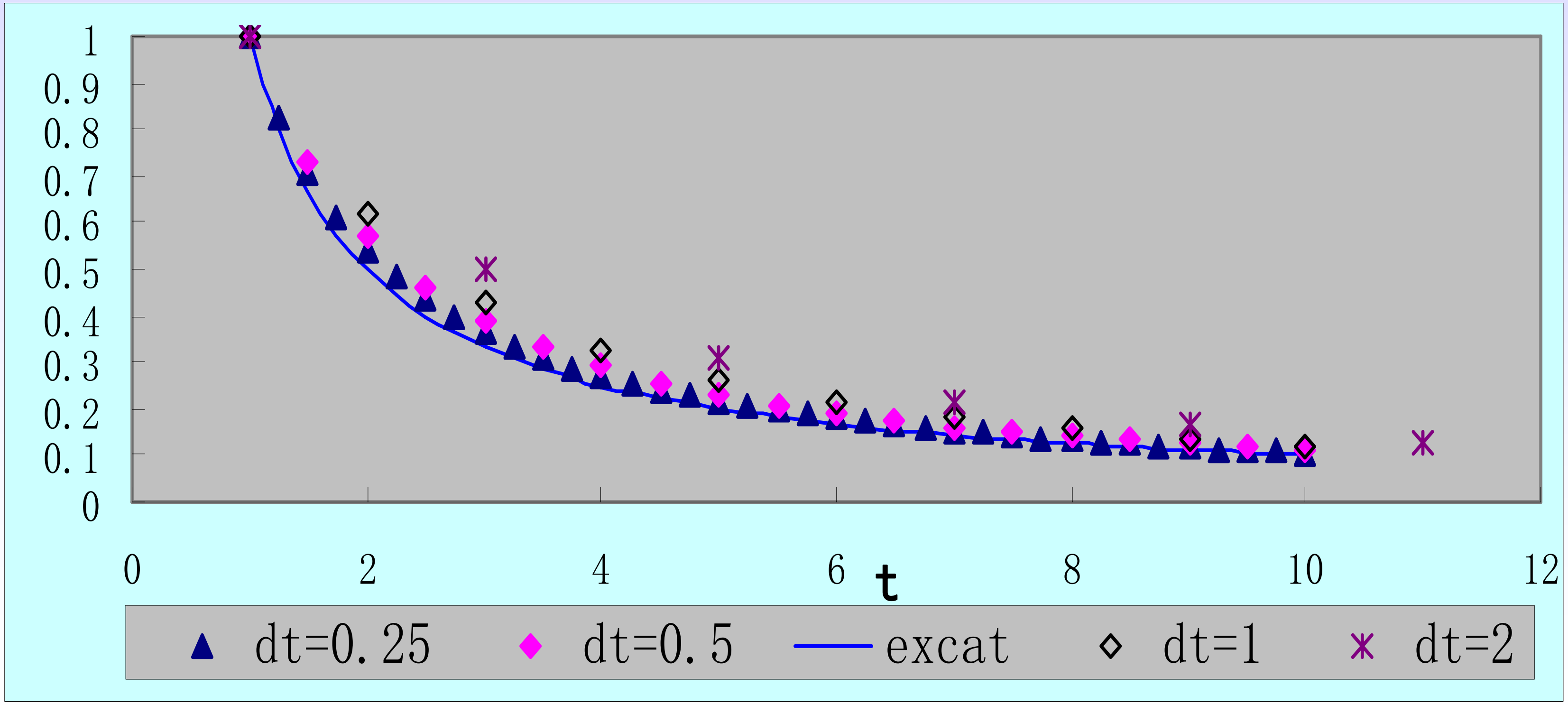
dt=0.5	u	exact	dt=1	u
1	1	1	1	1
1.5	0.5	0.6667	2	0
2	0.375	0.5	3	0
2.5	0.305	0.4	4	0
3	0.258	0.3333	5	0
3.5	0.225	0.2857	6	0
4	0.200	0.25	7	0
4.5	0.180	0.2222	8	0
5	0.164	0.2	9	0
5.5	0.150	0.1818	10	0
6	0.139	0.1667		
6.5	0.129	0.1538		
7	0.121	0.1429		
7.5	0.114	0.1333		
8	0.107	0.125		
8.5	0.101	0.1176		
9	0.096	0.1111		
9.5	0.092	0.1053		
10	0.087	0.1		

有限差分方法

例4: (ii)

- 隐式差分：

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t}=-\left(u^{k+1}\right)^2 \quad \rightarrow \quad u^{k+1}=\frac{-1+\sqrt{1+4\Delta t u^k}}{2\Delta t}$$



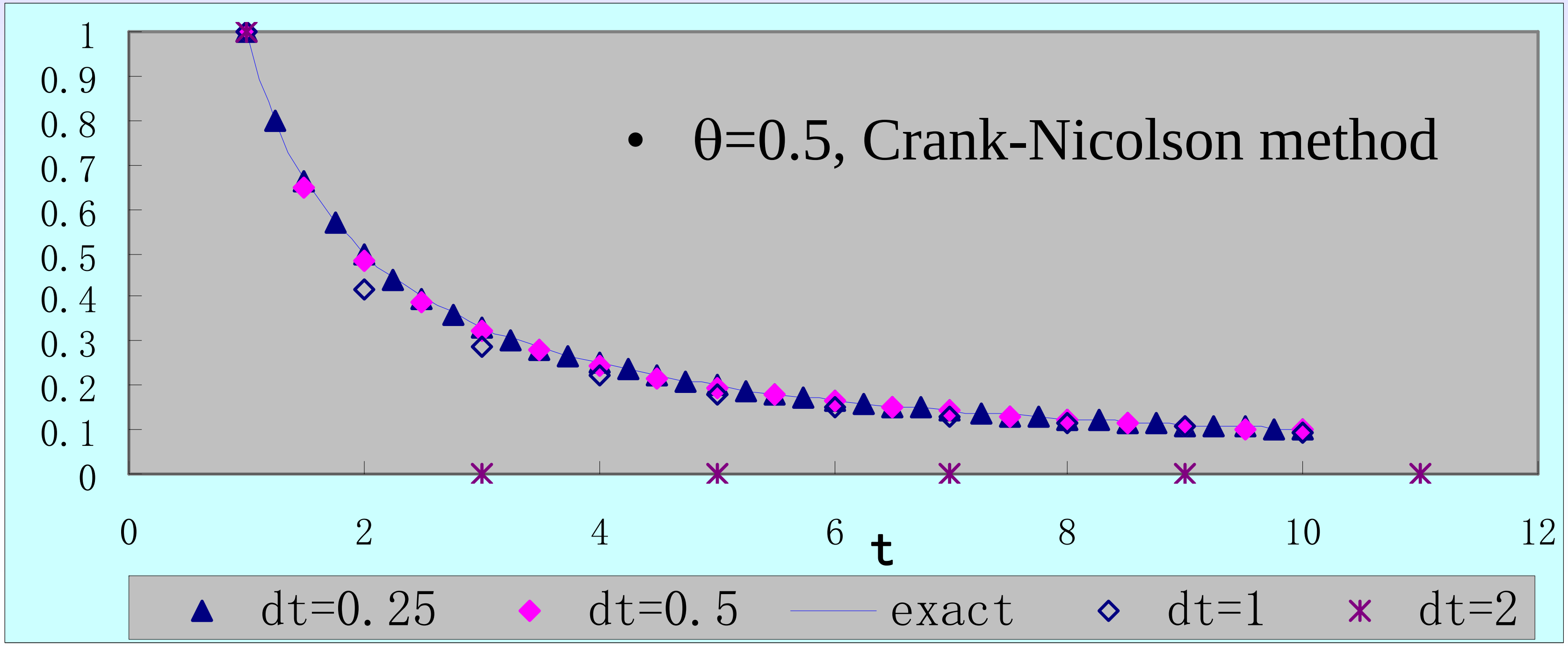
有限差分方法

例4: (iii)

- 权重差分：

有限差分近似

$$\frac{\left(u^{k+1}\right)-\left(u^{k}\right)}{\Delta t}=-\theta\left(u^{k+1}\right)^{2}-(1-\theta)\left(u^{k}\right)^{2} \rightarrow u^{k+1}=\frac{-1+\sqrt{1-4\theta\Delta t\left((1-\theta)\Delta t\left(u^{k}\right)^{2}-u^{k}\right)}}{2\theta\Delta t}$$



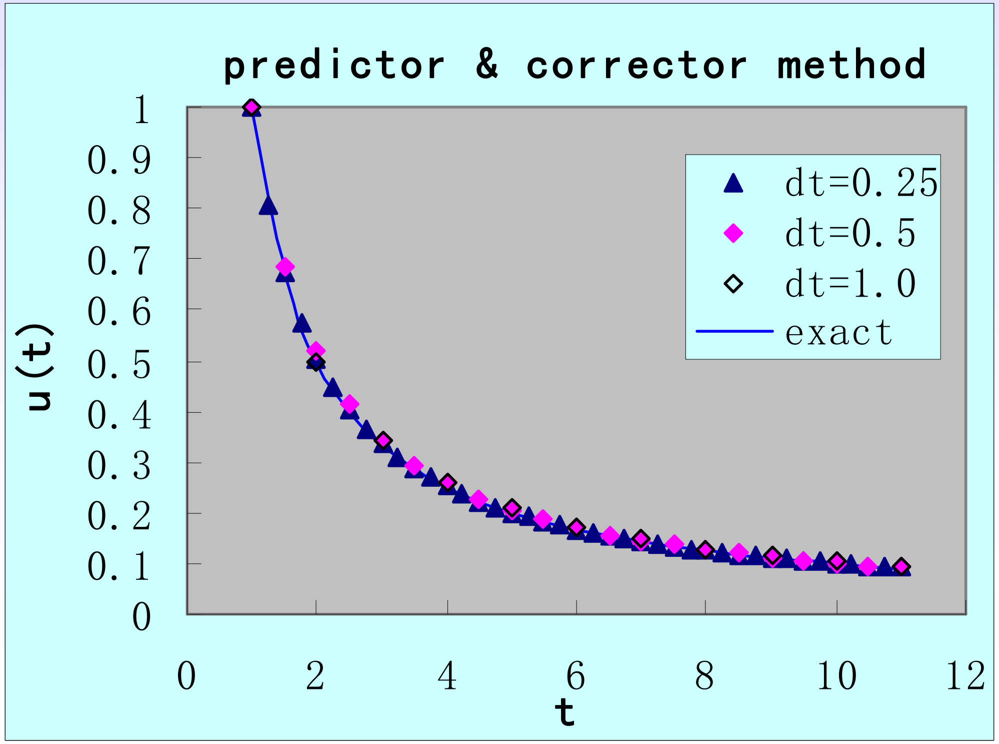
有限差分方法

例 4: (iv)

- **Predictor-corrector method**（预测-修正方法）

$$u^* = u^k - \Delta t \left(u^k\right)^2$$

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\Delta t}{2}\left[\left(u^k\right)^2 + \left(u^*\right)^2\right]$$

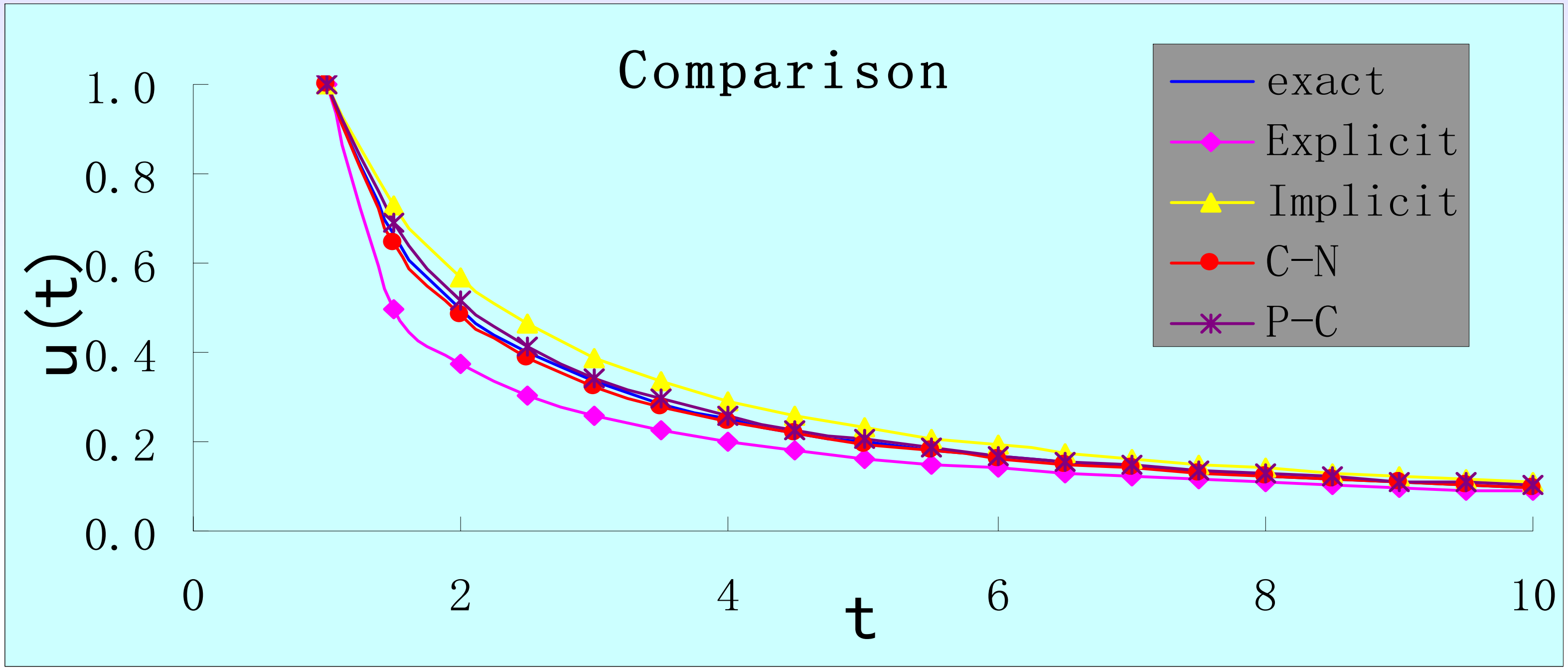


	N	O	P	Q
5	t	u	u*	exact
6	1	1		1
7	1.5	0.6875	0.5	0.6667
8	2	0.5184	0.4512	0.5
9	2.5	0.4144	0.3841	0.4
10	3	0.3445	0.3285	0.3333
11	3.5	0.2945	0.2851	0.2857
12	4	0.257	0.2511	0.25
13	4.5	0.228	0.224	0.2222
14	5	0.2048	0.202	0.2
15	5.5	0.1858	0.1838	0.1818
16	6	0.1701	0.1686	0.1667
17	6.5	0.1568	0.1556	0.1538
18	7	0.1454	0.1445	0.1429
19	7.5	0.1356	0.1349	0.1333
20	8	0.127	0.1264	0.1250
21	8.5	0.1194	0.119	0.1176
22	9	0.1127	0.1123	0.1111
23	9.5	0.1067	0.1064	0.1053
24	10	0.1013	0.101	0.1
25	10.5	0.0964	0.0962	0.0952
26	11	0.092	0.0918	0.0909

有限差分方法

例 4: (v)

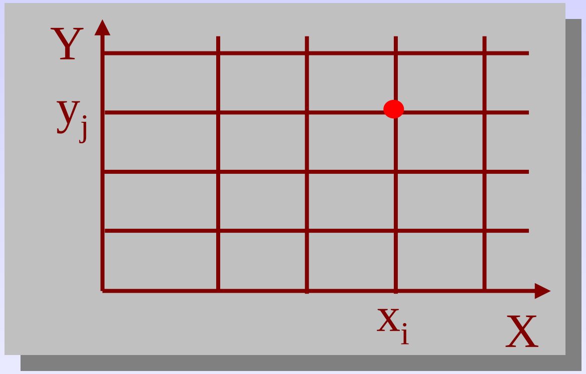
- 四种差分方法计算结果比较 (Δt=0.5)
  - —计算量
  - —计算机内存
  - —精度
  - —稳定性



有限差分方法

例 5: (i)

- **2D问题的有限差分解**



$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y),\ \ for \quad 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1$$

$$h(0,y)=1,\ h(1,y)=y \qquad h(x,0)=1-x,\ h(x,1)=1$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-\frac{R(x,y)}{T}$$ ← 地下水流方程(源项 R)

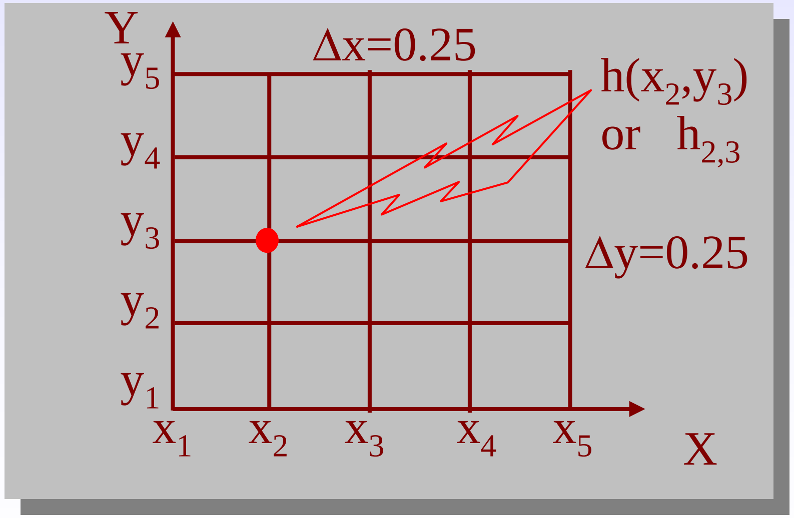
步骤1: 建立网格系统，令

$$\Delta x=\Delta y=0.25$$

步骤2: 采用有限差分方法

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{h_{i-1,j}-2h_{i,j}+h_{i+1,j}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{h_{i,j-1}-2h_{i,j}+h_{i,j+1}}{\Delta y^2}+O(\Delta y^2)$$



$$\frac{h_{i-1,j}-2h_{i,j}+h_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\frac{h_{i,j-1}-2h_{i,j}+h_{i,j+1}}{\Delta y^2}=f(x_i,y_j)$$

$$f(x_i,y_j)=-\pi^2\sin(\pi x_i)\sin(\pi y_j)$$

有限差分方法

例 5: (ii)

- 将这些差分方程应用于每一个网格内点，形成9个独立的线性代数方程组，每个方程具有下列形式：

$$h_{i-1,j}+h_{i+1,j}+h_{i,j-1}+h_{i,j+1}-4h_{i,j}=\Delta x^2 f(x_i,y_j)$$

步骤3: 对节点 **(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3)** 和 **(4,4)**，形成矩阵方程

$$h_{1,2}+h_{3,2}+h_{2,1}+h_{2,3}-4h_{2,2}=\Delta x^2 f(x_2,y_2)$$
$$h_{1,3}+h_{3,3}+h_{2,2}+h_{2,4}-4h_{2,3}=\Delta x^2 f(x_2,y_3)$$
$$h_{1,4}+h_{3,4}+h_{2,3}+h_{2,5}-4h_{2,4}=\Delta x^2 f(x_2,y_4)$$
$$h_{2,2}+h_{4,2}+h_{3,1}+h_{3,3}-4h_{3,2}=\Delta x^2 f(x_3,y_2)$$
$$h_{2,3}+h_{4,3}+h_{3,2}+h_{3,4}-4h_{3,3}=\Delta x^2 f(x_3,y_3)$$
$$h_{2,4}+h_{4,4}+h_{3,3}+h_{3,5}-4h_{3,4}=\Delta x^2 f(x_3,y_4)$$
$$h_{3,2}+h_{5,2}+h_{4,1}+h_{4,3}-4h_{4,2}=\Delta x^2 f(x_4,y_2)$$
$$h_{3,3}+h_{5,3}+h_{4,2}+h_{4,4}-4h_{4,3}=\Delta x^2 f(x_4,y_3)$$
$$h_{3,4}+h_{5,4}+h_{4,3}+h_{4,5}-4h_{4,4}=\Delta x^2 f(x_4,y_4)$$

$$h_{3,2}+h_{2,3}-4h_{2,2}=\Delta x^2 f(x_2,y_2)-h_{2,1}-h_{1,2}$$
$$h_{3,3}+h_{2,2}+h_{2,4}-4h_{2,3}=\Delta x^2 f(x_2,y_3)-h_{1,3}$$
$$h_{3,4}+h_{2,3}-4h_{2,4}=\Delta x^2 f(x_2,y_4)-h_{1,4}-h_{2,5}$$
$$h_{2,2}+h_{4,2}+h_{3,3}-4h_{3,2}=\Delta x^2 f(x_3,y_2)-h_{3,1}$$

$$h_{2,4}+h_{4,4}+h_{3,3}-4h_{3,4}=\Delta x^2 f(x_3,y_4)-h_{3,5}$$
$$h_{3,2}+h_{4,3}-4h_{4,2}=\Delta x^2 f(x_4,y_2)-h_{5,2}-h_{4,1}$$
$$h_{3,3}+h_{4,2}+h_{4,4}-4h_{4,3}=\Delta x^2 f(x_4,y_3)-h_{5,3}$$
$$h_{3,4}+h_{4,3}-4h_{4,4}=\Delta x^2 f(x_4,y_4)-h_{5,4}-h_{4,5}$$

有限差分方法

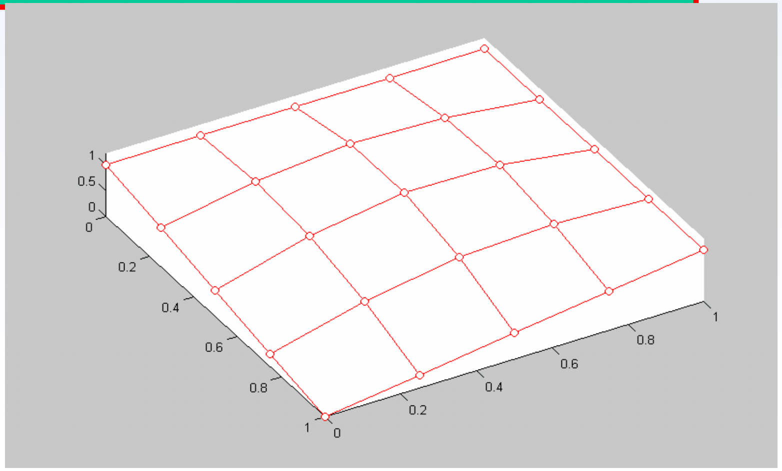
例 5: (iii)

- 代入边界条件，求解矩阵方程，得到内点地下水位

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{2,2} \\ h_{2,3} \\ h_{2,4} \\ h_{3,2} \\ h_{3,3} \\ h_{3,4} \\ h_{4,2} \\ h_{4,3} \\ h_{4,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.058 \\ -1.436 \\ -2.308 \\ -0.936 \\ -0.617 \\ -1.436 \\ -0.808 \\ -0.936 \\ -2.058 \end{Bmatrix}$$

求解：

$$\begin{Bmatrix} h_{2,2} \\ h_{2,3} \\ h_{2,4} \\ h_{3,2} \\ h_{3,3} \\ h_{3,4} \\ h_{4,2} \\ h_{4,3} \\ h_{4,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.076 \\ 1.247 \\ 1.201 \\ 0.997 \\ 1.276 \\ 1.247 \\ 0.701 \\ 0.997 \\ 1.076 \end{Bmatrix}$$



有限差分方法

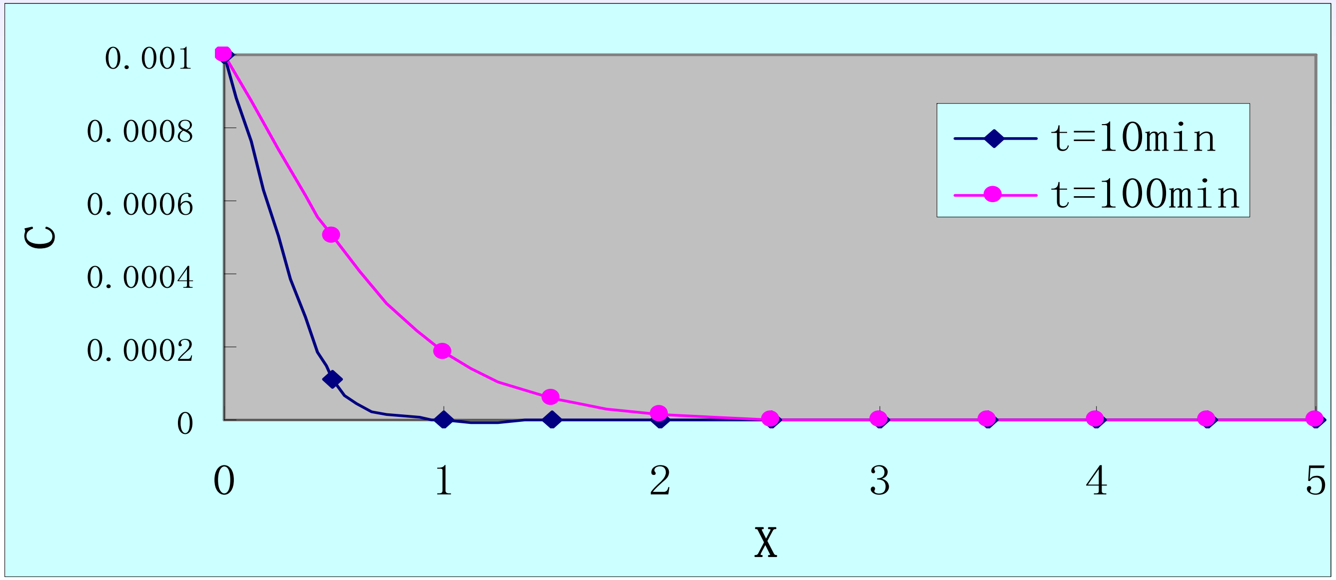
例 6: (i)

- 求解 $\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ $C(0,t) = C_0,\ C(\infty,t) = 0,\ and\ \ C(x,0) = 0$ 其中C_0=1 mg/m^3 , D=5×10^{-5} m^2/s

全显式差分方程：

$$\frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\Delta t} = D\frac{C_{i+1}^k - 2C_i^k + C_{i-1}^k}{\Delta x^2} \rightarrow C_i^{k+1} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}C_{i+1}^k + \left(1 - \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}\right)C_i^k + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}C_{i-1}^k$$

由收敛条件： $\gamma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$ 选取 Δx=0.5m, Δt=5 min



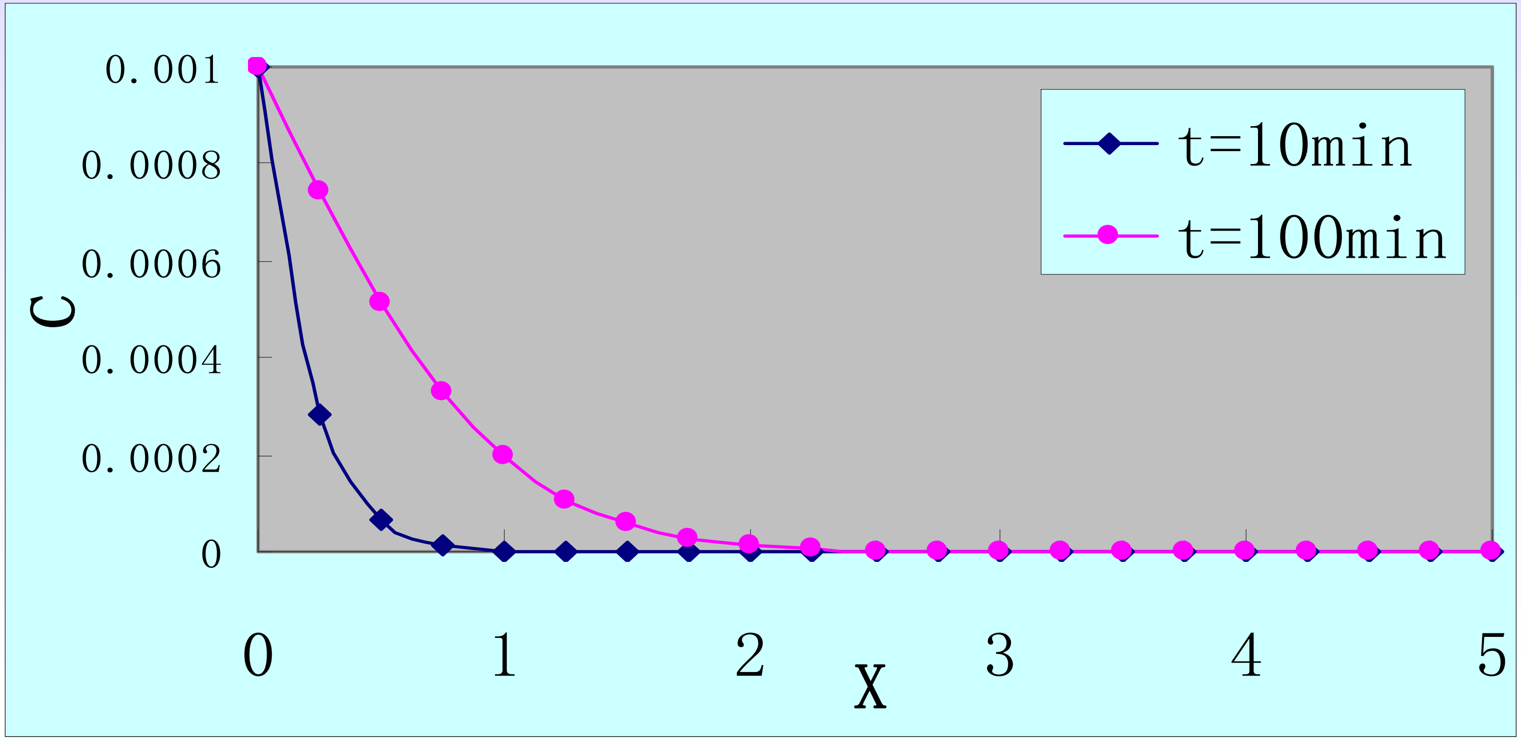
有限差分方法

例 6: (ii)

- 用全隐式差分求解

$$\frac{C_i^{k+1}-C_i^k}{\Delta t}=D\frac{C_{i+1}^{k+1}-2C_i^{k+1}+C_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \Rightarrow \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}C_{i+1}^{k+1}+\left(-1-\frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}\right)C_i^{k+1}+\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}C_{i-1}^{k+1}=-C_i^k$$

选取： **Δx=0.25m, Δt=10 min and 100min**



谢谢